

文章编号: 1000-8055(2010)12-2683-07

湍流模型对压气机数值模拟精度的影响

尹 松, 金东海, 朱 芳, 桂幸民

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 开发了一个求解叶轮机全三维黏性流场的程序, 采用了目前叶轮机数值模拟中常用的且模拟性能较好的三种湍流模型: $k-\epsilon$ 模型, $k-\omega$ 模型, Spalart-Allmaras (S-A) 模型, 计算了跨声压气机 NASA (National Aeronautics and Space Administration) Rotor 37 的流场, 并与实验进行了性能参数、三维流场和角区流动的对比分析. 考察在相同的数值计算平台上进行比较这几个湍流模型对压气机的数值模拟性能的影响. 最终结果表明: 对于具有强剪切、存在分离流的复杂的叶轮机三维流场来说, $k-\omega$ 模型数值模拟精度更高, 相比其他两个模型具有一定的优势.

关 键 词: 压气机; 三维黏性流场; 数值模拟; 角区流动; 湍流模型

中图分类号: V232.4

文献标识码: A

Influence of turbulence models on simulation of a compressor

YIN Song, JIN Dong-hai, ZHU Fang, GUI Xing-min

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: A three-dimensional numerical simulation code was developed as a standard three-dimensional viscous flow solver in a compressor. Three turbulence models frequently used in turbomachinery, including: $k-\epsilon$ model, $k-\omega$ model and Spalart-Allmaras (S-A) model, were employed in the code to simulate the National Aeronautics and Space Administration (NASA) Rotor 37. The performance parameters, three-dimensional flowfield and hub corner flow structures were compared with the experiment data. The influences of these three turbulence models for simulating compressors in the condition of the same calculating algorithm were compared. The present study demonstrates that $k-\omega$ model is superior among these three models for the complicated flowfield with separated, shear flow in a turbomachinery.

Key words: compressor; three-dimensional viscous flowfield; numerical simulation; hub corner flow; turbulence model

湍流问题广泛存在于科学研究与工程技术的许多领域. 而在人类发明的所有流体动力装置中, 轴流叶轮机内的湍流流场几乎是最为复杂的^[1]. 随着计算流体力学和计算机水平的不断发展, 出现了越来越多的湍流模型. 尽管如此, 选择真正适

合叶轮机内流场模拟的模型仍然是一个比较难的工作, 其中已有不少工作者对某些模型的性能进行评价^[2-4]. 本文也选取了目前叶轮机领域最为常见的几种模型, 将其应用到本文的程序中, 一方面完善计算流体软件, 一个较好的流体计算软件不

收稿日期: 2009-11-12; 修订日期: 2010-03-16

基金项目: 国家自然科学基金(50676004, 50736007)

作者简介: 尹松(1980—), 男, 湖北钟祥人, 博士, 主要从事叶轮机械流场数值模拟.

应该只提供一种湍流模型;另一方面对这几个模型模拟轴流压气机流场的能力评估,为本文后续工作提供依据。

1993年美国机械工程学会气轮机分会(ASME/IGTI)将 National Aeronautics and Space Administration(NASA) Rotor 37 作为盲题评估叶轮机械 CFD(计算流体动力学)程序的预估能力,参与计算结果与实验差别较大,并且各不相同。他们指出这种差别可能一部分是由于湍流模型的不足所导致^[5]。本文的主要目的就是在相同的数值计算平台下通过对 Rotor 37 的流场计算进行比较这几个湍流模型对压气机的模拟性能。

1 数值方法

本文控制方程采用在直角相对坐标系下经过无量纲化处理后的积分形式的三维非定常可压缩雷诺平均 Navier-Stokes(N-S)方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} dV + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_i + \mathbf{G}_j + \mathbf{H}_k) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_v i + \mathbf{G}_v j + \mathbf{H}_v k) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Omega} \mathbf{T} dV \quad (1)$$

其中 $\mathbf{U} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad \rho E]^{-1}$ 为方程守恒变量; $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ 为无黏通量; $\mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v, \mathbf{H}_v$ 为黏性通量; t 为时间; V 为单元控制体体积; $\mathbf{S}$ 为控制体表面积矢量; u, v, w 为 x, y, z 坐标方向速度分量; ρ 为密度; E 为总能量。

采用了一种紧致的交错网格有限体积法^[6]将 N-S 方程和湍流方程紧密的耦合在一起,即求解 N-S 方程采用的是网格中心法,求解湍流方程采用的是网格节点法。空间离散采用的是 Jameson 于 1981 年提出的中心差分加二、四阶人工黏性的方法,时间离散采用的是 5 步龙格-库塔时间推进法,并使用了当地时间步长,隐式残差平均法加速收敛。

计算网格将通过求解椭圆形方程生成的二维流面网格径向堆叠得到整个计算域的三维网格。

2 湍流模型方程

首先选取湍流模型方程是被广泛应用的由 Launder 和 Spalding^[7] 在 1974 年提出的应用于高雷诺数区域的 $k-\epsilon$ 模型

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \epsilon \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + c_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - c_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3)$$

湍流黏度按下式定义:

$$\mu_t = c_\mu \frac{\rho k^2}{\epsilon} \quad (4)$$

其中 $c_\mu = 0.09$, $c_1 = 1.44$, $c_2 = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\epsilon = 1.3$ 。

第二个湍流模型选取的是 1976 年 Wilcox 等^[8]提出的 $k-\omega$ 模型

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \hat{\tau}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \left(\alpha \frac{\omega}{k} \right) \hat{\tau}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 \quad (6)$$

湍流黏度按下式定义:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (7)$$

其中 $\beta^* = 0.09$, $\beta = 0.075$, $\alpha = 5/9$, $\sigma_k = 2.0$, $\sigma_\omega = 2.0$ 。

第三个模型选取的是 Spalart 和 Allmaras^[9] 发展的一方程 Spalart-Allmaras(S-A)模型,湍流黏度由下式求解:

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} \cdot f_{v1} \quad (8)$$

其中 $\tilde{\nu}$ 可以称为高雷诺数湍流运动黏度,由以下方程解得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i \tilde{\nu})}{\partial x_i} = & C_{b1} (1 - f_{t2}) \rho \tilde{S} \tilde{\nu} - \left[C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \frac{\rho \tilde{\nu}^2}{d^2} + \\ & \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + C_{b2} \rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} - \\ & \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + f_{v1} \rho \Delta U^2 \end{aligned} \quad (9)$$

关于这三个湍流模型方程的详细介绍和边界条件的给定均可参见原始文献^[9],这里不再赘述。

需要特别提出的是对于两方程的模型源项的处理,源项关系到湍流动能的生成和耗散的平衡,直接影响着湍流黏度的计算结果,对流场有着很大的影响,特别是湍流黏性比较明显的区域,例如边界层、强剪切层、激波/边界层的干扰流动中,源项的计算对数值解的精度和迭代求解的稳定有着

很重要的影响,尤其对于具有复杂流场的压气机的模拟,到了小流量、大攻角工况下,边界层分离区内的湍流耗散率由于源项中耗散项的作用出现无穷大,从而导致计算发散. 本文对两方程模型 $k-\epsilon$, $k-\omega$ 模型的源项采用了隐式处理

对于 $k-\epsilon$ 模型,源项可表示为

$$\begin{aligned} T_k &= \mu_t p_d - \frac{2}{3} \nabla \mathbf{W}(\rho k) - \rho \epsilon \\ T_\epsilon &= c_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t p_d - c_1 \frac{2}{3} \nabla \mathbf{W}(\rho \epsilon) - c_2 \frac{(\rho \epsilon)^2}{\rho k} \end{aligned} \quad (10)$$

将源项对角化处理后,再将源项中负的部位移到方程的左边,构成隐式时间推进公式

$$\begin{aligned} \Delta U_k &= (\rho k)^{n+1} - (\rho k)^n = \\ &\quad - R_k^n \\ \Delta t \frac{1 + \Delta t \left[\Delta^+ + 2 \frac{c_\mu}{\mu_t} (\rho k)^n \right]}{\Delta U_\epsilon &= (\rho \epsilon)^{n+1} - (\rho \epsilon)^n = \\ &\quad - R_\epsilon^n \\ \Delta t \frac{1 + \Delta t \left[c_1 \Delta^+ + \frac{3}{2} c_2 \frac{c_\mu}{\mu_t} (\rho \epsilon)^n \right]} \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\Delta^+ = \max \left\{ 0, \frac{2}{3} \nabla \mathbf{W} \right\}$

对于 $k-\omega$ 模型,其源项表示为

$$\begin{aligned} T_k &= \mu_t p_d - \frac{2}{3} \nabla \mathbf{W}(\rho k) - \frac{\beta^*}{\rho} (\rho \omega) (\rho k) \\ T_\omega &= \alpha \rho p_d - \alpha \frac{2}{3} \nabla \mathbf{W}(\rho \omega) - \frac{\beta}{\rho} (\rho \omega)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

其隐式时间推进公式

$$\begin{aligned} \Delta U_\omega &= \\ (\rho \omega)^{n+1} - (\rho \omega)^n &= \Delta t \frac{-R_\omega^n}{1 + \Delta t (\alpha \Delta^+ + 2 \beta \omega^n)} \\ \Delta U_k &= \\ (\rho k)^{n+1} - (\rho k)^n &= \Delta t \frac{-R_k^n - \beta^* k^n \Delta U_\omega}{1 + \Delta t (\Delta^+ + \beta^* \omega^n)} \end{aligned} \quad (13)$$

本文的数值计算中,发现通过这种对源项的隐式处理,大大提高了程序的稳定性,尤其到了小流量、大攻角工况下.

3 NASA Rotor 37 计算结果与分析

自从 1994 年美国机械工程学会气轮机分会将 Rotor 37 作为盲题算例以来,几乎所有编写叶轮机 CFD 程序的研究者都将其作为程序考核算

例. 一方面其有详细的实验数据和各个研究者的计算结果,可以很方便的进行对比分析;另一方面其几何尺寸和性能参数和现代压气机相近,在跨声转子中颇具代表性. 所以本文选取了 Rotor 37 作为本文研究的算例. 关于 Rotor 37 的详细参数介绍可参考文献[10]. 为了比较分析湍流模型对压气机的模拟性能,计算均采用同一套网格,以避免由网格带来计算影响. 计算域轴向×径向×周向网格点数为 $129 \times 57 \times 49$ 个节点. 图 1 是三种湍流模型在 Intel Itanium II 1.4G 的 SGI 服务器上的计算所耗时间的对比,纵坐标表示最大残差均方根 (e_{rms}) 的对数值,横坐标是 CPU (central processing unit) 的工作时间. 三种湍流模型数值处理方式完全相同,即完全在相同的数值平台下,可以看到在计算达到同样收敛标准所耗时间上, $k-\omega$ 模型具有明显优势.

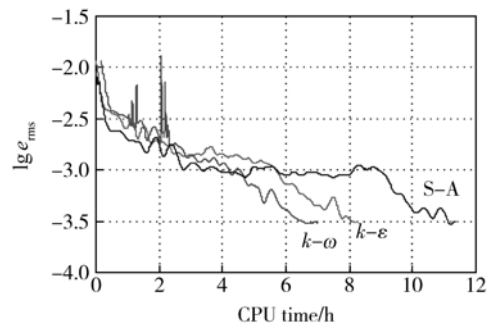


图 1 三种湍流模型计算所耗时间的对比

Fig. 1 Comparison of CPU time

3.1 性能计算结果对比分析

图 2 是不同湍流模型对 Rotor 37 的特性计算结果和实验结果比较. 数据用实验堵点流量进行了无量纲化处理,实验测得的堵点流量为 $(20.93 \pm 0.14) \text{ kg/s}$, 三种湍流模型的计算的堵点流量基本一致,与实验相差不到 1%. 总压比的特性计算与实验结果吻合不错,其中 $k-\omega$ 模型的结果吻合得最好, $k-\epsilon$ 模型, S-A 模型模拟的总压比偏低. 效率特性计算与实验有一定的误差,总体偏低,其中 $k-\omega$ 的结果最好,比实验低 1% 左右, S-A 稍差,大概低了 2%,且在高流量时效率的偏差较大,到了低流量时偏差变小. 这个计算结果与 Arima 等人^[11]的结果类似. Arima 指出这种差别主要是由于在计算不同工况时进口边界采用的都是相等的总压分布,实际上进口边界的总压分布应该对应于流量的变化. 同时 Denton 于 1997 年指出计算结果的平均方法也可能导致对参数的

低估^[5].

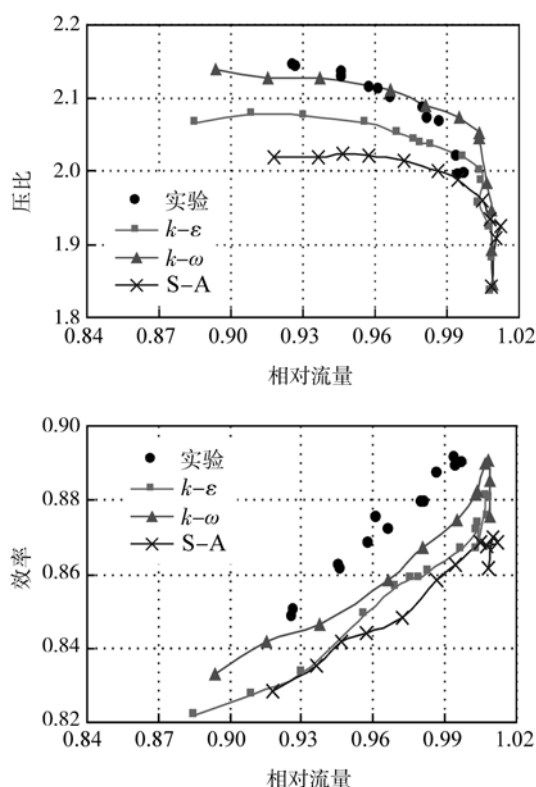


图2 Rotor 37 设计转速下特性曲线的比较

Fig. 2 Comparison of the performance at design speed (Rotor 37)

3.2 流场计算对比分析

图3显示了在出口测量站4上各个参数的展向分布.在两种流动状态下,对各参数的展向分布的计算结果同样是 $k-\omega$ 模型与实验结果较接近.而S-A模型最差.对于总压分布的模拟, $k-\omega$ 模型在近轮毂40%的展向位置内的两种流态的总压预估均偏高,40%~90%的展向位置偏低,而另外两种模型的仅在15%的展向位置内偏高,其余位置均偏低.将总压从轮毂到机匣进行平均以后得到的总压是 $k-\omega$ 模型最为接近,其他两个模型偏低.观察静压的分布,实验测得的在靠近轮毂处近20%的位置内存在一段负压力梯度段.在计算中因为采用的简单径向平衡方程求解获取的静压分布作为出口边界,所以梯度一直为正,这可能是导致其他参数计算结果误差的原因.关于出口边界采用简单径向平衡方程已经不再适用的原因李珉江等^[12]在文献中已有详细论述,此处不再详解.为了尽可能地满足实际情况,计算应该采用实际的静压分布作为出口边界.总温的计算结果分布形状和实验一致,在靠近机匣和轮毂段, $k-\epsilon$ 模型

更接近实验值,但在叶中位置 $k-\omega$ 模型偏离最小,S-A模型总的来说计算结果偏低.对于气流角的模拟, $k-\omega$ 模型基本体现了在98%堵点流量下10%~90%展向位置保证为 40° 不变,虽然其他两个模型也体现了对应位置气流角不变的特点,但总体气流角计算值偏小,最大误差达到了 5° .效率计算在98%堵点流量下三者差别不大,在40%~80%这段位置要比实验偏低,这段位置正是与总压预估偏低的位置,在低流量下三者的计算结果与实验差别很小,这和总的特性曲线显示在低流量下效率计算结果逐渐和实验结果吻合.

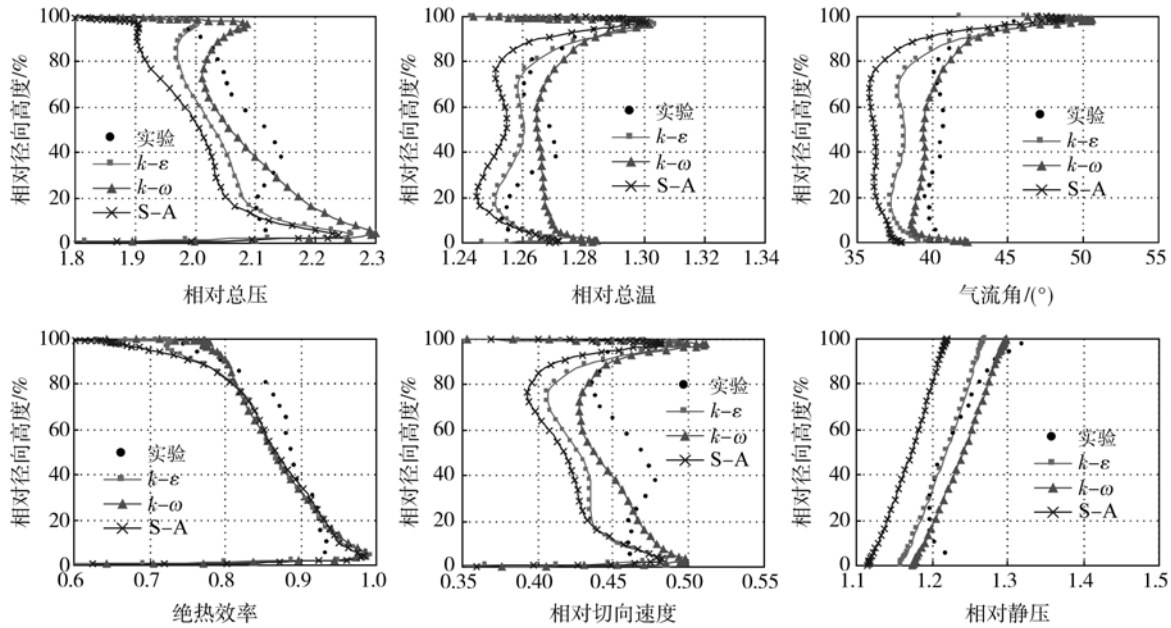
图4显示的98%堵点流量下70%径向高度处的马赫数等值线,三个模型的计算结果与实验吻合较好,激波出现的位置与实验一致,只是计算捕获激波较宽,这主要是由于本文采取的中心差分格式引起的.激波后吸力面边界层模拟结果较实验均偏厚,这主要是由于吸力面上存在强烈的激波/边界层干扰,而且激波后的吸力面的边界层是强三维的流动,具有很强的各向异性,这三个湍流模型是基于线性涡黏性假设建立湍流模型,显然对于这种强三维的复杂流场区域并不合适.所以针对这个区域的流场模拟,对于湍流模型还需做一定的改进.另外三者计算的尾迹较实验明显而且形状窄而长,这表明计算的尾迹掺混并不强,湍流模型在尾迹剪切流中,对黏性估计不足.

综上所述,采用不能反映真实流动的简单径向平衡方程作为计算出口边界和湍流模型对尾迹区黏性预估不足是导致了计算结果与实验的误差的主要原因;三个模型的涡黏性假设建立基础对于强三维的复杂的激波边界层干扰区的流场并不适合,需要对湍流模型做进一步的改进或采用别的非线性涡黏性假设或更复杂的雷诺应力模型.

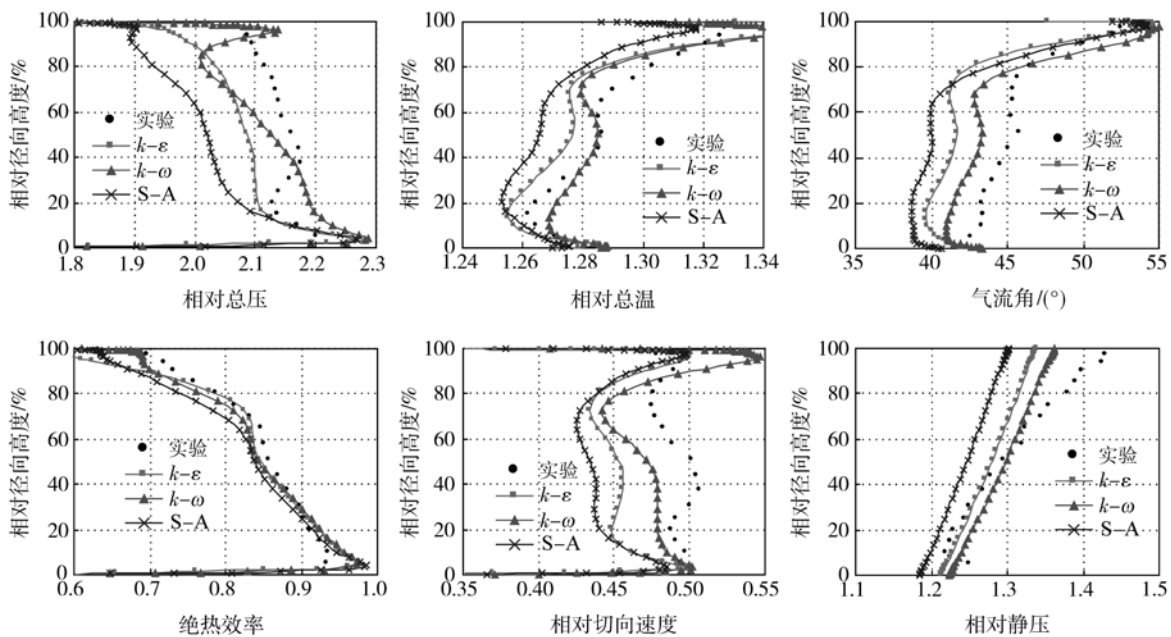
3.3 角区流场模拟结果对比分析

对于特性的计算通过调整总能在某种程度上满足就计算要求,但是对于流场细节的模拟却存在很大差异.尤其对于吸力面和端壁角区的分离流动,对于压气机的研发及改进,准确预估复杂的角区分离流动是一项非常重要的工作. Adamczyk 和 Copenhaer 等^[13-14]诸多研究者已经认识到对于压气机的设计准确计算端壁流动非常重要.

在图3中显示的总压径向分布,实验结果在靠近轮毂出有一段总压突然降低,而计算中并没有这个现象. Hah 等^[15]解释了在特定转速下的角区失速时近轮毂产生这种总压骤降的原因.虽然



(a) 98% 堵点流量下的对比



(b) 92.5% 堵点流量下的对比

图 3 测量站 4 上的相对总压、相对总温、气流角、绝热效率、相对切向速度、
相对静压的展向分布

Fig. 3 Spanwise distributions of relative total pressure ratio, relative total temperature, flow angle, adiabatic efficiency, relative tangential velocity, relative static pressure

图 4 显示的 70% 叶高处流场与实验吻合得很好, 但从图 5 计算所得轮毂和吸力面构成的角区的极限流线图可以看到, 对于角区的流场模拟, 三个模型还是有很大差别, 其中 $k-\omega$ 模型模拟出来的流场比较均匀, 没有出现太大的分离, 而 $k-\epsilon$ 模型和

S-A 模型模拟的结果较为复杂, 吸力面后半段出现明显分离, 尾迹较为明显, 且叶片尾缘有明显的径向潜流, 这也恰好可以说明图 2 中切向速度和气流角的分布情况, 三个模型对这两个参数的计算结果偏低, 而对于流量的计算与实验吻合得较

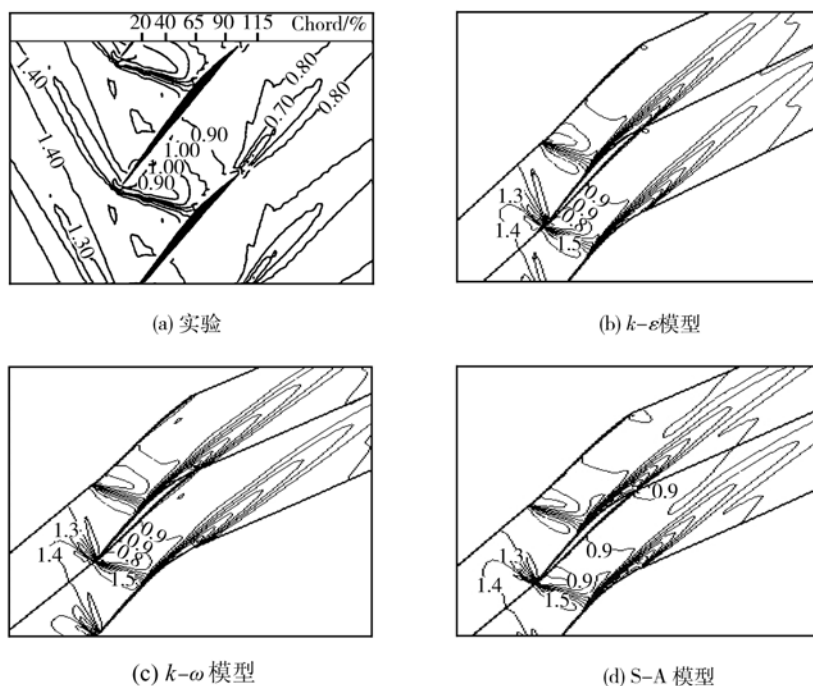


图 4 98%堵点流量下 70%径向高度处的马赫数等值线

Fig. 4 Relative Mach number contours at 70% span for 98% choke mass flow rate

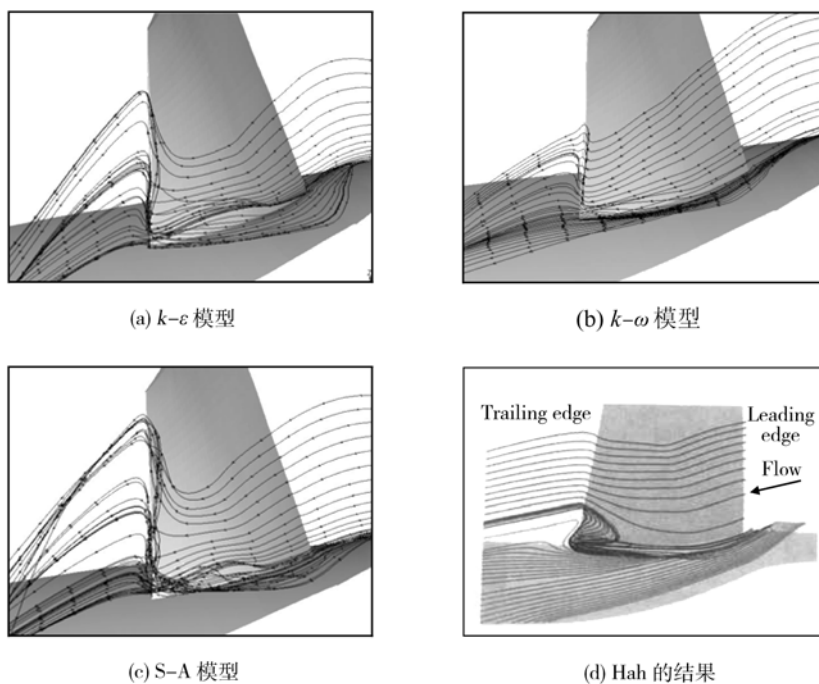


图 5 98%堵点流量下轮毂角区处的极限流线

Fig. 5 Streamline near hub at 98% choke mass flow rate

好,说明平均轴向速度与实验较为一致,叶片吸力面分离较大和边界层较厚会导致落后角过大,落后角过大在轴向速度相等情况下,切向速度即会偏小,模拟出来的分离越大,边界层越厚得到切向

速度和气流角的计算结果就与实验误差越大.所以可以推断对于角区流场的模拟结果应该是 $k-\omega$ 模型更接近实际,同时,从图 5(d)中 Hah 所得的角区模拟结果对比分析,本文 $k-\omega$ 模型更为相近.

这也恰恰说明了为什么特性计算中, $k-\omega$ 模型计算的总压和效率更接近实验值。

这个结论与 Wilcox 等^[8]通过各种算例评估各种湍流模型的结果一致:对于自由剪切湍流、附着边界层流和适度分离流 $k-\omega$ 模型有较高的优势。

4 结 论

通过应用三个湍流模型对 NASA Rotor 37 的数值模拟和实验结果的对比分析,得出以下结论:

1) 在相同的数值平台,相同的计算条件下, $k-\omega$ 模型达到相同的计算精度所耗时间更短。

2) 对于特性线的计算结果, $k-\omega$ 模型的结果与实验吻合得较 $k-\epsilon$ 模型、S-A 模型要好。

3) 对于流场的模拟,三者模拟结果与实验都比较一致,只是计算捕获激波宽度较实验要宽,这主要是由于程序采用的中心差分格式引起。

4) 对于激波边界层干扰后的边界层的模拟,三者结果较实验偏厚,这主要是由于三个模型是基于线性涡黏性假设建立的,对于这种各向异性的强三维的流场并不合适。

5) 在对于轮毂与吸力面尾缘相连的角区模拟中, $k-\epsilon$ 模型和 S-A 模型模拟的角区分离明显,尾迹区范围也比 $k-\omega$ 模型要大。正是由于 $k-\omega$ 模型对于端壁处流场的模拟的优越性才使得其对性能参数的计算结果更接近实验结果。

总的来说,对于具有强剪切、存在分离流的复杂流场的压气机来讲, $k-\omega$ 模型较 $k-\epsilon$ 模型和 S-A 模型更有优势。

参考文献:

[1] Bradshaw P. Turbulence modeling with application to turbomachinery[J]. Progress Aerospace Science, 1996, 32(6):575-624.

[2] Wilcox D C. Turbulence modeling: an overview[R]. AIAA-2001-0724, 2001.

[3] Menter F R. Performance of turbulence models for attached and separated adverse pressure gradient flows[J].

AIAA Journal, 1992, 20(8):2066-2072.

[4] Menter F R. A comparison of some recent eddy-viscosity turbulence models [J]. Journal of Fluids Engineering, 1996, 118:514-519.

[5] Denton J D. Lesson from Rotor 37[J]. Journal of Thermal Science, 1997, 6(1):1-13.

[6] 李泯江, 桂幸民. 用于叶轮机械流场计算的交错网格有限体积法[J]. 北京航空航天大学学报, 2004, 30(6):577-582.

LI Minjiang, GUI Xingmin. Staggered finite volume method for turbomachinery viscous flowfield numerical investigation[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(6):577-582. (in Chinese)

[7] Launder B E, Spalding D B. The numerical computation of turbulent flow[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1974, 3(2):269-289.

[8] Wilcox D C, Traci R M. A complete model of turbulence [R]. AIAA-76-351, 1976.

[9] Spalart P R, Allmaras S R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows[R]. AIAA-92-0439, 1992.

[10] Fottner L. Test cases for computation of internal flows in aero engine components[R]. AGARD-AR-275, 1990.

[11] Arima T, Sonoda T, Shirotori M, et al. A numerical investigation of transonic axial compressor rotor flow using a low-Reynolds-number $k-\epsilon$ turbulence model [J]. ASME Journal of Turbomachinery, 1999, 121(1):44-58.

[12] 李泯江, 桂幸民. 多块网格计算跨音压气机带叶尖间隙流场[J]. 北京航空航天大学学报, 2005, 31(5):529-534.

LI Minjiang, GUI Xingmin. Numerical simulation of transonic axial compressor rotor flow with tip clearance using multi-block meshes[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(5):529-534. (in Chinese)

[13] Adamczyk J J, Celestina M L, Freitzer E M. The role of tip clearance in high-speed fan stall[J]. ASME Journal of Turbomachinery, 1993, 115(1):28-39.

[14] Copenhaver W W, Hah C, Puterbaugh S L. Three-dimensional flow phenomena in a transonic high-throughflow compressor stage[J]. ASME Journal of Turbomachinery, 1993, 115(2):240-248.

[15] Hah C, Loellbach L. Development of hub corner stall and its influence on the performance of axial compressor blade rows[J]. ASME Journal of Turbomachinery, 1999, 121(1):67-77.